Appunti di Algebra Lineare

Roberto Castellotti

November 24, 2020

Contents

1 Matrici

Uno degli strumenti piu' importanti per codificare informazioni sono le **matrici**, per esempio rappresentano il metodo piu' efficiente per rappresentare **sistemi lineari (Gauss)**, tuttavia presentano grossi limiti se il sistema non è interamente numerico (sono presenti dei parametri), una altra applicazione molto importante è quella relativa al **calcolo vettoriale**.

Indichiamo con $\mathbb{K}$ (campo) un generico insieme numerico $\mathbb{R}/\mathbb{Q}/\mathbb{C}$, possiamo definire una matrice M con entrate in K e avente taglia $m \cdot n$ con $m =$ numero di righe e $n =$ numero di colonne.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

L' insieme delle matrici di taglia $m \times n$ si indica $M_{mn}(K)$ o $K^{m \times n}$. L' insieme di elementi a_{ii} prende il nome di **diagonale della matrice**.

1.1 Matrice Nulla

Una matrice in cui tutte le entrate sono 0 si chiama **matrice nulla**.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 Matrice Quadrata

Una matrice in cui $m = n$ si chiama **matrice quadrata**.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sono equivalenti le seguenti scritture: $M_{nn}(k)$, $M_n(k)$, K^n

1.3 Matrice Riga o Colonna

Le seguenti matrici sono rispettivamente una **matrice riga** e una **matrice colonna**.

$$R_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \quad C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

1.4 Matrici Triangolari

Le **matrici triangolari** sono matrici i cui valori sopra/sotto la diagonale sono zeri, si dividono in:

1.4.1 Matrici Triangolari Superiori

$a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

$$T_{sup} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1.4.2 Matrici Triangolari Inferiori

$a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$

$$T_{inf} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1.5 Matrici Diagonali

Un caso particolare di **matrice triangolare** sono le **matrici diagonali**, in cui tutte le entrate esterne alla diagonale sono nulle ($a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1.6 Matrici Identiche

Un caso particolare di **matrice diagonale** sono le **matrici identiche**, in cui tutte le entrate esterne alla diagonale sono 0, mentre le entrate sulle diagonali sono 1.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \forall i \neq j \\ 1 & \forall i = j \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.7 Matrici Trasposte

La **trasposta** di una matrice $m \times n$ è una matrice $n \times m$ ottenuta invertendo righe con colonne, detta A la matrice di partenza si indica con A^T la sua trasposta, le due matrici hanno la stessa diagonale.

$$A \in M_{mn}(K) \xrightarrow[\text{trasposta}]{} A^T \in M_{nm}(k)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Proprietà

- L' operazione di trasposizione è **involutiva**, ovvero $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

1.8 Matrice Simmetrica

Una matrice $A \in M_n(K)$ si dice **simmetrica** se $A = A^T$, ovviamente tutte le **matrici diagonali** sono simmetriche.

$$A = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 8 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

1.9 Matrice Nilpotente

Una matrice $A \in M_n(K)$ si dice **nilpotente** se $\exists r > 0 | A^R = 0$

Una matrice nilpotente non e' invertibile.

2 Operazioni tra matrici

2.1 Somma di matrici

Per la **somma tra matrici** è necessario che le matrici siano della stessa taglia, quindi definiamo la somma:

$$\begin{cases} A = (a_{ij}) \in M_{mn}(K) \\ B = (b_{ij}) \in M_{mn}(K) \\ A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{mn}(K) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Proprietà

- la somma di due matrici è **commutativa** e **associativa**
- 0 (matrice nulla) è l' elemento neutro
- detta A una matrice con entrate a_{ij} il suo opposto $-A$ è $-a_{ij}$, quindi $A + (-A) = 0$
- La somma di due matrici diagonali è una matrice diagonale.
- La somma di due matrici simmetriche è una matrice simmetrica.
- La somma di due matrici triangolari è una matrice triangolare

2.2 Prodotto di matrici

2.2.1 Moltiplicazione per scalare

$$\begin{cases} \lambda \in K \\ A = (a_{ij}) \in M_{mn}(K) \\ \lambda A = (ka_{ij}) \in M_{mn}(K) \end{cases}$$

2.2.2 Prodotto righe x colonne

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_n b_n$$

2.2.3 Prodotto tra due matrici

Per moltiplicare tra loro due matrici è neccesario che $m_2 = n_1$, ovvero che il numero di colonne di M_1 sia uguale al numero di righe di M_2.

$$\begin{cases} A \in M_{mn}(K) \\ B \in M_{np}(K) \\ A \cdot B \in M_{mp}(K) \end{cases}$$

Le entrate di $A \cdot B$ sono definite come: $C_{ij} = {R_i}^A \cdot {C_j}^B$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m1} & \dots & C_{mp} \end{pmatrix}$$

Proprietà $\quad A \in M_{mn}(K), B \in M_{nm}(K)$

- $A \cdot B = 0 \not\Rightarrow A = 0 \vee B = 0$
- $A \cdot B = A \cdot C, A \neq 0 \not\Rightarrow B = C$ (no legge cancellazione)
- $A \cdot B \neq B \cdot A$ (no proprietà commutativa)
- $(A+B) \cdot C = AC+BC$ $A \cdot (B+C) = AB+AC$ (vale proprietà distributiva)

2.3 Matrici Invertibili

Sia $A \in M_n(k)$, è invertibile se esiste $B \in M_n(K) | A \cdot B = B \cdot A = I_n$ (matrice identica rappresenta l' elemento neutro rispetto al prodotto di matrici). B si chiama **matrice inversa** e si indica con A^{-1}, segue che:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Una matrice $A \neq 0$ non è sempre invertibile, ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Assumiamo per assurdo che A sia invertibile, esisterebbe quindi una matrice B s.t. $A \cdot B = B \cdot A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, quindi $A \cdot B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, risulta evidente che $A \cdot B$ non possa essere la matrice identica.

Esercizio

Dimostrare che se A è una matrice nilpotente non è invertibile.
Se A è nilpotente esiste un $r > 1 \mid A^R = 0$, se fosse invertibile esisterebbe $B : A \cdot B = B \cdot A = I_n$

$$\underbrace{A \cdot A^{r-1}}_{A^R} = 0$$

continua a valere 0 se molitplichiamo per la matrice B, quindi

$$B \cdot A \cdot A^{r-1} = 0$$

applichiamo la **proprietà associativa**

$$(B \cdot A) \cdot A^{r-1} = 0$$

sappiamo che $B \cdot A = I$, quindi

$$I \cdot A^{r-1} = A^{r-1} = 0$$

crolla dunque la **minimalità** di R.

2.4 Proprietà delle matrici

- Se A è invertibile A^{-1} è invertibile e $(A^{-1})^{-1} = A$
- $A \cdot B$ è invertibile se A e B lo sono, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$,

  $$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) \stackrel{?}{=} I$$

  scambiando le parentesi otteniamo

  $$A \cdot \underbrace{(B \cdot B^{-1})}_{I} \cdot A^{-1} \stackrel{?}{=} I$$

  $$A \cdot A^{-1} = I, A \cdot A^{-1} = I$$

3 Matrici Elementari

Le **matrici elementari** sono matrici ottenute svolgendo operazioni elementari.
I_n è la **matrice identica** $((I_n)^{-1} = I_n, I_n \cdot I_n = I_n)$

Matrice E_{ij} E_{ij} è ottenuta da I_n scambiando R_i con $R_j (i \neq j)$, è evidentemente invertibile, infatti $E_{13} \cdot E_{13} = I$, quindi $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice $E_i(\lambda)$ $E_i(\lambda)(\lambda \neq 0 \in K)$ questa matrice è una matrice identica con λ nella i-esima riga della diagonale

$$E_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_i(\lambda)$ è invertibile, infatti: $E_i(\lambda) \cdot (E_i(\lambda))^{-1} = I_n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Matrice $E_{ij}(\lambda)$ $E_{ij}(\lambda)$ è ottenuta da I_n facendo $R_i \to R_i + \lambda R_j$, ad esempio:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \to R_1 + 2\lambda R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1 Operazioni elementari sulle matrici

$E_{ij} \cdot A$ risulta in una matrice B ottenuta da A scambiando $R_i \leftrightarrow R_j$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv E_{12} \cdot A$$

$E_i(\lambda) \cdot A$ risulta in una matrice B ottenuta da A facendo $R_i \cdot \lambda$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} R_2 \leftrightarrow 2R_2 \to B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \equiv E_{21}(2) \cdot A$$

$E_{ij}(\lambda) \cdot A$ risulta in una matrice B ottenuta da A scambiando $R_i \leftrightarrow R_i + \lambda R_j$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_2 + 2R_1$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv E_2(2) \cdot A$$

4 Riduzione di Gauss

La **riduzione di Gauss** è un metodo numerico estremamente efficiente per affrontare problemi sulle matrici, data una matrice generica $A \in M_{mn}(k)$ e usando solo operazioni elementari vogliamo ridurre A ad una "matrice a scalini", ovvero una matrice dove il primo elemento non nullo della riga (i+1)-esima si trova a destra rispetto al primo elemento non nullo della riga i-esima.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Considerando A_{11} come pivot è necessario fare:

$$R_2 \to R_2 - 2R_1$$
$$R_3 \to R_3 - 3R_1$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 6 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

A questo punto vogliamo avere 0 al posto di 6 in A_{32}, quindi scelto come pivot A_{22} facciamo:

$$R_3 \to R_3 - 2R_2$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo cosi' ottenuto la matrice a scalini desiderata, osserviamo che questa non è unica, ma il numero dei pivot non cambia.

4.1 Matrice totalmente ridotta per righe

La **matrice totalmente ridotta** è una matrice ridotta per righe che ha come valore dei pivot 1 e sopra ai pivot 0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to \frac{1}{3} R_2$$

$$R_3 \to \frac{2}{2} R_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 + \frac{4}{3} R_3$$

$$R_1 \to R_1 - 3R_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \to R_1 + 2R_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La **matrice totalmente ridotta**, a differenza della **matrice ridotta per righe** è sempre unica, il numero dei pivot tuttavia è sempre uguale, inoltre puo' essere:

$$\begin{cases} I_n & \#\text{pivot} = \#\text{righe} \\ \begin{pmatrix} x & \dots & x \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \#\text{pivot} < \#\text{righe} \end{cases}$$

Theorem 4.1

Sia A una matrice quadrata sono fatti equivalenti:

1. A è invertibile
2. La totalmente ridotta di A è la matrice identica

Proof 4.1

Per passare da A alla totalmente ridotta I_n si usano operazioni elementari $E_n E_2 E_1$ sono matrici elementari

$$E_n E_2 E_1 \cdot A = I_n$$

Abbiamo quindi:
$$A^{-1} = E_n \cdot E_1 \cdot E_2$$
possiamo moltiplicare per la matrice identica (elemento neutro)
$$E_n \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot I$$
Questo vuol dire che che A^{-1} si ottiene dalla matrice identica facendo le stesse operazioni elementari operate su A per ottenere la **matrice totalmente ridotta**.

4.2 Calcolo della matrice inversa

Per calcolare la matrice inversa affianchiamo alla matrice in considerazione la matrice identica, operiamo quindi la riduzione totale su una matrice applicando le operazioni anche alla matrice identica, lavoriamo sulla matrice:
$$\left(1 \;\middle|\; 2\right)$$
Alla fine delle operazioni ci aspettiamo di trovare:

- in 1 la matrice in questione totalmente ridotta
- in 2 A^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$R_2 \to R_2 + R_1$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
$$R_2 \to \frac{1}{5} R_2$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$
$$R_1 \to R_1 - 2R_2$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

Verifichiamo quanto ottenuto:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} + \frac{3}{5} & \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5 Risoluzione dei sistemi lineari con l' algoritmo di Gauss

Lavoriamo su un sistema lineare con n incognite $x_1 \dots x_N$ e m equazioni in K:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A questo sistema lineare possiamo associare:

- la matrice A dei coefficienti delle incognite
- la matrice B dei termini noti

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Per esempio $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Il sistema lineare nella forma matriciale $A \cdot X = B$ rievoca $ax = b$ in $\mathbb{R}$, se $a \neq 0 \nexists$ soluzione, altrimenti $x = \frac{b}{a}(a^{-1} \cdot b)$, questo pero' perde senso nel caso delle matrici. Se A è una matrice $n \times m$ con n #incognite e m #equazioni ed è invertibile $(\exists A^{-1}) \Rightarrow X = A^{-1}B$.

Esercizio

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -5x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\exists! X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 26 \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 26 \end{cases}$$

Dato $AX = B$ le soluzioni del sistema non cambiano se:

- invertiamo l' ordine di due equazioni $(R_i \leftrightarrow R_J)$
- moltiplichiamo una equazione per $\lambda \neq 0$ $(R_i \to \lambda R_i)$
- operiamo algebricamente su una equazione $(R_i \to R_i + \lambda R_j)$

- operiamo la riduzione di gauss sulle righe della **matrice completa** $(A|B)$.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Esercizio

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \end{cases} \quad (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{matrice ridotta}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array}\right) x_1, x_3, x_4 = \text{incognite pivotali}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_3 - 3x_4 = 3 \\ 4x_4 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 + x_4 + 1 = -x_2 + \frac{1}{2} \\ x_3 = 3 + 3x_4 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \\ x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(-x2 + \frac{1}{2}, x_2, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) / x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Si dice che esistono ∞^1 soluzioni (1=#incognite -#pivot)

Theorem 5.1

Un sistema $AX = B$ ammette soluzioni (compatibile) se e solo se nella matrice completa ridotta non esistono pivot nell' ultima colonna

Proof 5.1

L' ultima colonna è quella dei termini noti, se questa fosse un pivot tutti i valori alla sua sinistra devono essere 0, un pivot deve essere $\neq 0$, affermeremmo quindi che $0 = x | x \neq 0$

Theorem 5.2

ia $AX = B$ un sistema compatibile, se $p = \#\text{pivot}(\leq n)$ e $n = \#\text{incognite}$:

- $p = n \exists !$ soluzione

- $p < n \exists \infty^{n-p}$ soluzioni

Esercizio

Determinare le soluzioni al variare di $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ ax_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 4 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$R_2 \to R_2 - aR_1, R_3 \to R_3 - R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 2-a & 2-a^2 \\ 0 & a-1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Continuiamo nei calcoli assumendo che $a \neq 1$ (pivot)

$$R_3 \to R_3 + R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 2-a & 2-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a & -a^2-a+6 \end{array}\right)$$

Continuiamo nei calcoli assumendo che $a \neq 2$ e $a \neq 1$ (pivot), $\#p = \#n = 3$, non ci sono pivot nell' ultima colonna quindi il sistema ammette soluzioni (una).

- a=1 non esistono soluzioni

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) R_3 \to R_3 - R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

- $a = 2 \exists \infty^1$soluzioni

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a \neq 1,2 & \exists!\text{soluzioni} \\ a = 1 & \exists!\text{soluzioni} \\ a = 2 & \exists\infty^1\text{soluzioni} \end{cases}$$

- $a \neq 1, 2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ (1-a)x_2 + (2-a)x_3 = 2 - a^2 \\ (2-a)x_3 = 6 - a - a^2 \end{cases} = \begin{cases} x{=}a - \frac{a-4}{1-a} - a - 3 + a \\ x_2 = \frac{-4+a}{1-a} \\ x_3 = a + 3 \end{cases}$$

$$S = (\ldots, \frac{-4+a}{1-a}, a+3) \forall a \neq 1, 2$$

- $a = 2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_2 = -2 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = -2 - x_3 + 2 \\ x_2 = 2 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$S = \{(-x_3, 2, x_3) | x_3 \in \mathbb{R}\}$$

6 Determinante di una matrice

Definizione 6.0: Determinante di una matrice

Definiamo il determinante $|A|$ di una matrice $A \in M_{mn}(k)$.

$$\begin{cases} n = 1 \quad A = (a) \quad |A| = a \\ n = 2 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} |A| \coloneqq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ n = 3 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Definiamo A_{ij} la sottomatrice di A ottentuta cancellando R_i e C_j:

$$A_{31} = \begin{pmatrix} \cancel{2} & -3 & -6 \\ \cancel{5} & -7 & 3 \\ 12 & \cancel{5} & \cancel{6} \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|$$

Dal momento che i calcoli potrebbero rivelarsi molto lunghi sarebbe conveniente avere molte entrate della matrice a zero, questo richiama subito la riduzione di Gauss, vediamo se possiamo effettuarla senza modificare il determinante.

Data una matrice identica $I_n = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) |I_n| = 1$, piu' in generale per ogni matrice diagonale A $|A| = a_1 a_2 \dots a_n$, inoltre

- $|E_{ij}| = -1$
- $|E_i(\lambda)| = \lambda$
- $|E_{ij}(\lambda)| = 1$

6.1 Teorema di Binet

Theorem 6.1: Teorema di Binet

Date $A, B \in M_n(k)$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| \ = |B \cdot A|$$

Usiamo questo teorema per vedere come cambia il determinante di A se operiamo con operazioni elementari, volte a semplificare il calcolo del determinante.

- $R_i \to R_j$ il determinante cambia segno

- $R_i \to \lambda R_j$ il determinante è moltiplicato per $\lambda \neq 0$
- $R_i \to R_i + \lambda R_j$ il determinante non cambia

Theorem 6.2

Una matrice A è invertibile se e solo se $|A| \neq 0$, In particolare $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, infatti $|A \cdot A^{-1}| = |I| \xRightarrow{\text{Binet}} |A||A^{-1}| = 1$

6.2 Regola di Laplace

Theorem 6.3: Regola di Laplace

Data una matrice $A \in M_{mn}(k)$

$$\forall i 1, \ldots, n |A| = \sum_{j=1}^{n} ((-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|)$$

Questo ci permette di scegliere una riga con valori nulli rispetto ad altre semplificando i conti (vale lo stesso per le colonne), quindi $|A^T| = |A|$.

Esercizio

Data la matrice A calcolare il suo determinante e dire se e' invertibile

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 + 3R_2$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = |B| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - 4R_1$$

$$R_3 \to R_3 - R_1$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -2 & -12 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6 \neq 0, \text{la matrice è invertibile}$$

Data una matrice T triangolare superiore o inferiore $|T| = a_{11}a_{22}a_{nn}$
Ecco due conseguenze immediate della regola di Laplace:

- Se in A abbiamo una riga o una colonna di zeri $|A| = 0$

- Se in A abbiamo due righe/colonne proprorzionali o uguali $|A| = 0$

7 Calcolo della matrice inversa

Sia A una matrice quadrata, definiamo:

- $C_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ **complemento algebrico** dell' elemento a_{ij},dove A_{ij} è la sottomatrice $n-1 \times m-1$ ottenuta da A cancellando R_i e C_j.
- $A^* = (C_{ij})^T$ **aggiunta** della matrice A

Esercizio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} A^* = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = \left|\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right| = 3 \quad C_{12} = -\left|\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right| = 3 \quad C_{13} = \left|\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right| = -1$$

$$C_{21} = \left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right| = -2 \quad C_{22} = \left|\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right| = -2 \quad C_{23} = -\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right| = 3$$

$$C_{31} = \left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right| = 1 \quad C_{32} = -\left|\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right| = -6 \quad C_{33} = -\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right| = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = |A|I_n = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

Nel nostro caso:

$$\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{smallmatrix}\right) = 7I_3$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

7.1 Rango (o caratteristica) di una matrice

Il determinante di una matrice e' una caratteristica solo delle matrici quadrate, estendiamo adesso questo concetto a tutte le matrici, data una matrice generica $A \in M_{mn}(k)$ un minore di ordine r è una sottomatrice di A $r \times r$ (ottenuta da A considerando r righe e r colonne)

Definizione 7.0: Rango di una matrice

Data una matrice generica $A \in M_{mn}(k)$ diciamo **rango (o caratteristica)** di A e denotiamo con $rk(a)$ oppure $\rho(A)$ l' ordine massimo di un minore di A con determinante non nullo.

Prendiamo una matrice quadrata A, $rk(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$
Quindi, dato $rk(A) = r$ se:

- $\exists$ un minore di ordine r di A con determinante $\neq 0$
- ogni minore di A di ordine $\geq r+1$ ha determinante nullo

Per la regola di Laplace basta che abbiano $det = 0$ quelli di ordine $r+1$ (deriva dalla induttività del calcolo del determinante)

Theorem 7.1: Teorema di Kronecker

$$rk(A) = r \quad \text{se}$$

- $\exists$ un minore di ordine r con $det \neq 0$
- ogni minore di ordine $r+1$ che è ottenuto **orlando** il minore di ordine r scelto ha determinante nullo

Esercizio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$rk(A) \leq 4, rk(A) = 4 \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$|A| = 0 rk(A) \leq 3$$

$$rk(A) \geq 2 \text{ perchè per esempio } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ora non dobbiamo dimostrare che tutti i minori di ordine 3 sono zero, basta guardare quelli che contengono il minore precedente, ovvero:

$$R_3C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad R_3C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_4C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad R_4C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.2 Rango di una matrice ridotta per righe

Una generica matrice $A \in M_{mn}(k)$ ridotta per righe ha $rk(A) =$#pivot, per esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} rk(A) = 3$$

Per dimostrarlo dobbiamo affermare che:

- $rk(A) < 4$
- $\nexists$ minori di ordine 4 con $det \neq 0$

Risulta evidente che non esistano minori di ordine 4 con determinante diverso da zero (Laplace su ultima riga)

Consideriamo il minore ottenuto con le righe e le colonne contenenti i pivot:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Abbiamo dimostrato quindi entrambe le ipotesi.

Definizione 7.2

Sia $A \in M_{mn}(k)$, B_{mm} invertibile, C_{nn} invertibile, allora

- $rk(BA) = rk(A)$
- $rk(AC) = rk(A)$

Inoltre, data una matrice generica $A \in M_{mn}(k)$ e una matrice ridotta per righe B

$$rk(A) = rk(B) = \#pivot$$

Esercizio

Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il rango di

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2a & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\forall a \neq 0 \begin{vmatrix} a & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2a \neq 0 \Rightarrow rk(A) = 2$$

$$a = 0 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} rk(A) = 2 \text{ perchè } \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Quindi $\forall a \in \mathbb{R}$ $rk(A) = 2$

Esercizio

Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$

$$rk \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

Sicuramente $rk(A) \leq 3$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & h \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & h \end{vmatrix} = 1 - h$$

Se $h \neq 1 \quad rk(A) = 3$

Se $h = 1 \quad rk \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Sicuramente $rk(A) \geq 2$ perchè $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Consideriamo i minori ottenuti orlando il minore in questione::

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$
- $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Possiamo quindi affermare che $\forall h \in \mathbb{R} \quad rk(A) = 3$

Esercizio

Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il rango di $A = \begin{pmatrix} -3 & 2h & -2 \\ -3 & 2+2h & -1 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. $rk(A) \leq 3$
2. $rk(A) \leq 3 \Leftrightarrow |A| \neq 0$
3. $|A| =$

$$R_2 \to R_2 - R_1 \begin{vmatrix} -3 & 2h & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ h & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} 2h & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -6 + h(2h+4) =$$
$$= 2h^2 + 4h - 6 =$$
$$= h^2 + 2h - 3 = 0 =$$
$$h = 1 \vee h = -3$$

4. $rk(A) = 3 \Leftrightarrow h \neq 1, -3$

$$h = 1 \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$rk(A) \leq 2$ (se h=1 |A|=0), inoltre $rk(A) = 2$ perchè $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$$h = -3 \quad A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -2 \\ -3 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$rk(A) \leq 2$ (se h=-3 |A|=0), inoltre $rk(A) = 2$ perchè $\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

5. Quindi: $\begin{cases} rk(A) = 3 \text{ se } h \neq 1, -3 \\ rk(A) = 2 \text{ se } h = 1, -3 \end{cases}$

8 Teoria dei sistemi lineari

Theorem 8.1: Teorema di Cramer

Dato un sistema quadrato ($\#equazioni = \#incognite$), $AX = B$ ammette una sola soluzione se e solo se $|A| \neq 0$, questo implica che la matrice A sia invertibile, quindi $X = \frac{1}{|A|} A^* \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

L'unica soluzione è $(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$

$$\overline{x_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \text{dove} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{rappresenta la i-esima colonna di A}$$

Esercizio

Risolvere il seguente sistema di Cramer

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0$ Per il Teorema di Cramer $\exists!$ soluz.

$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{5}$ $x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{5}$ $x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{5}$

Una generalizzazione di Cramer è data dal teorema di Rouchè-Capelli:

Theorem 8.2: Teorema di Rouchè-Capelli

Un sistema $AX = b$ ha soluzioni se e solo se $rk(A) = rk(A|b)$ (matrice completa), in particolare detto n il numero di incognite

- se $rk(A) = rk(A|b) = n$ il sistema ammette una e una sola soluzione
- se $rk(A) = rk(A|b) < n$ il sistema ammette $\infty^{n-rk(A)}$ soluzioni, ovvero infinite soluzioni che dipendono da $n - rk(A)$ parametri

La dimostrazione combina due fatti noti:

- $rk(A) = \#$ pivot della ridotta

- $AX = B$ ha soluzione se e solo e $\nexists$ pivot nell' ultima colonna della riduzione di $(A|B)$

Osserviamo che $rk(A|B) \geq rk(A)$, se $\exists$ un pivot nell' ultima colonna $rk(A|B) > rk(A)$

Esercizio

Discutere al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 2x + \lambda z = 1 \\ 3x + \lambda y - 2z = 2 \\ \lambda x + 2z = 1 \end{cases}$$

1. secondo Cramer $\exists! soluz. \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & \lambda \\ 3 & \lambda & -2 \\ \lambda & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 = \lambda \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{vmatrix} = \lambda(4 - \lambda^2)$, quindi $\exists! soluz. \Leftrightarrow \lambda \neq 0, \pm 2$
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 2 & \lambda & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\lambda(4-\lambda^2)} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & \lambda \\ 3 & 2 & -2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\lambda(4-\lambda^2)} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ 3 & \lambda & 2 \\ \lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{\lambda(4-\lambda^2)}$$
2. $\lambda = 0 \quad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$
3. dal momento che stiamo considerando i valori per cui $|A| = 0 \quad rk(A) < 3$, in particolare $rk(A) = 2$ perchè $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$
4. $rk(A|B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2-4) = 6 \neq 0$ (orlando il minore di ordine 2 precedente)
5. $rk(A|B) = 3 \rightarrow \nexists soluzioni$
6. $\lambda = \pm 2 \quad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$
7. $rk(A) = 2$ perchè $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$
8. $rk(A|B) = 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$
9. $rk(A) = rk(A|B) = 2 \quad \exists \infty^{(n-p)=1}$ soluzioni.
10. ripetendo lo stesso procedimento per $\lambda = -2$ otteniamo che $\nexists$ soluzioni

9 Vettori

In $\mathbb{R}^2$ consideriamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonale.

Possiamo indicare il vettore v come $\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$, è un segmento applicato in O, ed è orientato, ovvero ha:

- una lunghezza $\overline{OP}$
- una direzione (retta passante per O, P)
- un verso (indicato dalla freccia)

$||v|| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$ (Pitagora)

9.1 Somma tra due vettori

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $v + w := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

9.2 Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{pmatrix}$

9.3 Prodotto scalare tra due vettori

Dati due vettori $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ il prodotto scalare e' definito come il prodotto righe per colonne tra la prima matrice trasposta e la seconda matrice:

$V^T \cdot W = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{pmatrix}$

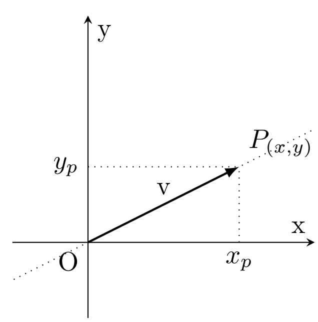

Figure 1: Rappresentazione di un vettore sul piano cartesiano

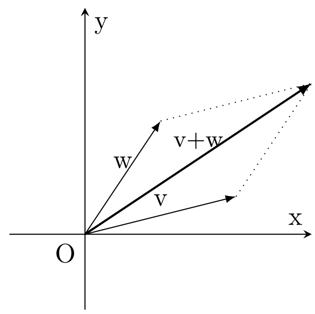

Figure 2: Regola del parallelogramma per la somma di vettori

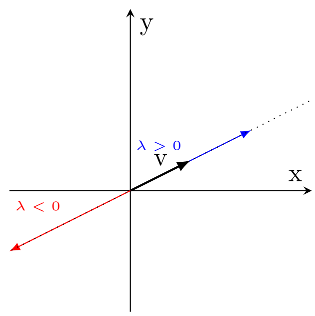

Figure 3: Moltipilcazione di uno scalare per un vettore

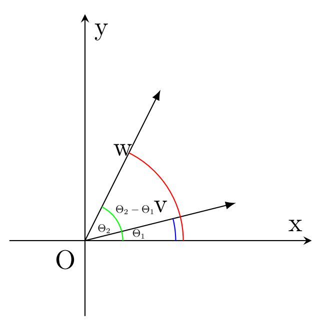

Figure 4: Prodotto tra due vettori

$$x_1 = \|v\| \cos \Theta_1 \quad y_1 = \|v\| \sin \Theta_1$$
$$x_2 = \|w\| \cos \Theta_2 \quad y_2 = \|w\| \sin \Theta_2$$
$$v \cdot w = x_1 x_2 + y_1 y_2 =$$
$$= \|v\|\|w\|\underbrace{(\cos \Theta_1 \cos \Theta_2 + \sin \Theta_1 \sin \Theta_2)}_{\cos (\Theta_2 - \Theta_1)}$$

Geometricamente definiamo il prodotto scalare come:

$$v \cdot w = \|v\|\|w\| \cos(\Theta_2 - \Theta_1)$$

Ricordiamo che $0 \leq \Theta \leq \pi$ e che **il prodotto tra due vettori è nullo se i vettori sono perpendicolari**.

9.4 Proiezione ortogonale di un vettore

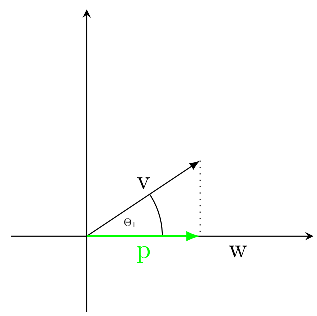

Figure 5: Proiezione ortogonale del vettore v su w

La proiezione del vettore v sul vettore w è definita come:

$$v \cdot w = \|v\|\|w\| \cos \Theta$$
$$\|p\| = \|v\| \cos \Theta = \frac{v \cdot w}{\|w\|}$$

Possiamo estendere i ragionamenti fatti in $\mathbb{R}^n$, definiamo un vettore di $\mathbb{R}^n$ come: $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ con $x_1 \in \mathbb{R}$ Valgono:

- $v + w = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$
- $\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda y_1 \end{pmatrix}$
- $v \cdot w = v^T \cdot w = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$

Valgono le considerazioni fatte anche sulla proiezione dei vettori.

9.5 Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale, che si indica con $v \wedge w$ o $v \times w$ è un vettore perpendicolare ad entrambi i vettori ed è definito come:

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} v \wedge w = \left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

È dimostrabile che $\|v \times w\| = \|v\|\|w\| \sin \widehat{vw}$, quindi se $v \times w = (0{,}0{,}0)$ i vettori v e w sono paralleli.

10 Vettori linearmente dipendenti o indipendenti

Siano $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ si definisce **combinazione lineare** di $v_1, \dots, v_r$ con coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ il vettore $\lambda_1 v_1, \dots \lambda_r v_r$. Ad esempio:

$$2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dati $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}$ diciamo **spazio vettoriale** ($\langle v_1 \dots v_r \rangle$ oppure con $L(v_1, \dots, v_r)$) generato da $v_1, \dots, v_r$:

$$\{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r | \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}\}$$

In $\mathbb{R}^2$ consideriamo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

Risulta evidente che il risultato ottenuto indichi l' intero piano cartesiano, ma osserviamo che la stessa considerazione vale per $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} | \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix}$$

ovvero $\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = a \\ 2\lambda = b \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \to \exists \lambda_1, \lambda_2$

Possiamo fare le stesse considerazioni con altre tuple di vettori, per esempio:

- $\mathbb{R}^2 = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$
- $\mathbb{R}^2 = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ (sistema 2 equazioni e 3 incognite, ha soluzioni)

Mentre è falso che:

- $\mathbb{R}^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

  per esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\mathbb{R}^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$ (stesso vettore)

Esercizio

Dimostrare che $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero che $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} = \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_1 = -1 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Ora sostituiamo in (1) valori ottenuti (4)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Trovando i coefficienti abbiamo dimostrato quanto richiesto (6)

Definizione 10.0: Vettori linearmente dipendenti

I vettori $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ sono **linearmente dipendenti** se $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r$

non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0 (\text{vettore nullo})$$

Ad esempio $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono **linearmente dipendenti**, ossia $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tutti nulli s.t.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Il sistema è rappresentato da una matrice ridotta con 2 pivot e 3 incognite di rango 2, il sistema omogeneo ha quindi ∞^1 soluzioni (Rouchè-Capelli).

Definizione 10.0: Vettori linearmente indipendenti

I vettori $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ sono **linearmente indipendenti** se

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_r = 0 \end{cases}$$

Ovvero i vettori non hanno alcuna relazione l' uno con l' altro

Esercizio

Dire se $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono **linearmente indipendenti**.
Per dimostrarlo facciamo:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Il sistema e' quadrato, possiamo applicare quindi il Teorema di Cramer, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, inoltre dal momento che il sistema è omogeneo la soluzione è il valore nullo, v_1, v_2, v_3 sono **linearmente indipendenti**.

$v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}$ sono **linearmente dipendenti** se e solo se uno di loro si scrive come combinazione lineare dei rimanenti.

Esercizio

Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}_{\lambda_1 \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$

Dobbiamo dimostrare che $\forall v = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\ \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} s.t$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{1}$$

$$= \begin{pmatrix}2\lambda_1 + \lambda_2\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = a \\ \lambda_2 = b \\ \lambda_3 = c \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(a - \lambda_2) = \dfrac{a-b}{2} \\ \lambda_2 = b \\ \lambda_3 = c \end{cases} \qquad \square \tag{3}$$

A livello geometrico significa che v_1, v_2, v_3 possono essere un sistema di coordinate per $\mathbb{R}^3$ non ortogonale

11 Basi

Dati dei vettori $v_1, \dots, v_r$ diciamo che sono una **base** di V se sono linearmente indipendenti, e li indichiamo con $\langle v_1, \dots, v_r \rangle = V$, nell' esempio precedente $\mathbb{R}^3 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ se v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti sono una **base**.

Esercizio

Dimostriamo che v_1, v_2, v_3 dell' esercizio precedente sono linearmente indipendenti.

$$v_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix}2\lambda_1 + \lambda_2\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

11.1 Basi Canoniche

Le **basi canoniche** sono il sistema di coordinate ortogonali e unitarie.

- $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, abbiamo dimostrato che $\mathbb{R}^2 = \langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \rangle$ (linearmente indipendenti)
- $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Esercizio

Dati $v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), v_2 = \left(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right), v_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}\right)$ dimostrare che $\mathbb{R}^2 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, ovvero che $\mathbb{R}^2$ è generato v_1, v_2, v_3 e determinare se descrivono una base di $\mathbb{R}^2$.

Dobbiamo provare che $\forall \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = b \end{cases} \tag{4}$$

Si dimostra facilmente che questo sistema ha soluzioni, quindi $\mathbb{R}^2$ è generato dai vettori v_1, v_2, v_3 , determiniamo ora se i vettori sono una base, ovvero se sono **linearmente indipendenti**, cioè se:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \stackrel{?}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Usiamo la combinazione lineare trovata precedentemente (3)

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_3 = -\frac{2}{3}\lambda_2 \end{cases} \tag{7}$$

Scegliendo per esempio $\lambda_2 = 3$ otteniamo

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases} \tag{8}$$

Una soluzione non nulla, quindi v_1, v_2, v_3 **non sono una base** di $\mathbb{R}^2$

Come dimostrare in modo concreto se i vettori sono **linearmente dipendenti** o **linearmente indipendenti**?

1. Se consideriamo un solo vettore $v \neq 0$ è sempre **linearmente indipendente** ($\lambda v = 0 \stackrel{\lambda}{\Rightarrow} = 0$)
2. Se consideriamo due vettori v_1, v_2 sono **linearmente dipendenti** se e solo se sono **direttamente proporzionali** ($\lambda_1 \neq 0 \ v_1 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} v_2$), possiamo cioè ottenere un vettore moltiplicandone un altro per uno scalare, per esempio
$$\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right) \text{e} \left(\begin{smallmatrix}-2\\-4\\-6\end{smallmatrix}\right) \text{sono } \textbf{linearmente dipendenti}$$

3. $v_1, \dots, v_r$ sono **linearmente indipendenti** se e solo se non ci sono relazioni che li legano, ovvero se e solo se: $rk\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ v_1 & v_r \end{pmatrix} = r$.

   Dimostriamo quanto affermato con un esempio:

   Esercizio

   Consideriamo $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

   Per stabilire se sono linearmente dipendenti o indipendenti facciamo la combinazione lineare

   $$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix} -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $$\begin{cases} -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

   Dal momento che dobbiamo risolvere un sistema a tre equzioni e tre incognite (Cramer) esiste solamente la soluzione nulla se il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero:

   $$\exists! \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

   Osserviamo che questa matrice è la matrice con i vettori in colonna. I vettori sono **linearmente indipendenti** se e solo se:

   $$rk \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

   In questo caso il determinante della matrice è uguale a zero e il rango è uguale a 2, quindi i vettori sono **linearmente dipendenti**.

   Alcune conseguenze:

   - Se $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ allora $v_1, \dots, v_r$ sono **linearmente dipendenti**(con una colonna di zeri il rango della matrice non puo' essere massimo)
   - Se si considerano $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ e $r > n$ (i.e 4 vettori in $\mathbb{R}^3$) il rango non puo' mai essere r (è definito come il minimo tra n ed r), sono quindi sempre **linearmente dipendenti**
   - Se si considerano $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ $r = n$ (i.e 3 vettori in $\mathbb{R}^3$)sono **linearmente indipendenti** se e solo se $\begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ v_1 & v_r \end{vmatrix} \neq 0$

Nell' esempio precedente i vettori v_1, v_2, v_3 non sono una base di $\mathbb{R}^3$ perchè **linearmente dipendenti** e non generano $\mathbb{R}^3$, osserviamo che la terza colonna è una combinazione delle altre due, quindi v_3 è totalmente superfluo nella scrittura, ovvero $\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$

Esercizio

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinare se v_1, v_2, v_3:

(a) Sono **linearmente indipendenti**

(b) Sono una base di $\mathbb{R}^4$

(a) $rk \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} 3$

Sicuramente $rk(M) > 2$ (il minore $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$), consideriamo l' orlato $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, ha evidentemente determinante non nullo, il rango della matrice è quindi 3 e v_1, v_2, v_3 sono di conseguenza **linearmente indipendenti**, verifichiamo ora se sono una base di $\mathbb{R}^4$.

(b) $\mathbb{R}^4 \stackrel{?}{=} \langle v_1, v_2, v_3\rangle$, NO, $\mathbb{R}^4$ ha piu' spazio di 3 vettori, per dimostrarlo troviamo un vettore di $\mathbb{R}^4$ non generato da v_1, v_2, v_3:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

ma non lo possiamo scrivere come combinazione lineare dei vettori, se consideriamo $v_1, v_2, v_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, verifichiamolo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

12 Basi e dimensione

Si dimostra che:

1. Ogni $V = \langle v_1, \ldots, v_2\rangle \neq 0$ ammette una base

2. Le basi sono **equipotenti** (due basi di V hanno lo stesso numero di elementi), per questo motivo è definita la dimensione dim(V) che rappresenta il numero di elementi di una base. Se $V = \langle 0\rangle$ (vettore nullo) non possiamo parlare di base, ma si dice che dim(V)=0.

La base canonica di $\mathbb{R}^n$ ha forma $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$

$v_1, \ldots, v_n$ in $\mathbb{R}^n$ sono una base di $\mathbb{R}^n$ se e solo se $v_1, \ldots, v_n$ sono **linearmente indipendenti**, quindi se e solo se $\begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ v_1 & v_n \end{vmatrix} \neq 0$

Esercizio

I seguenti vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

I vettori sono quindi una base di $\mathbb{R}^3$.

13 Completamento ed estrazione di basi

Esercizio

Considerando in $\mathbb{R}^3$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dimostrare che $v_1, \ldots, v_4$ non sono una base di $\mathbb{R}^3$ e estrarre una base di $\mathbb{R}^3$.
Ogni base di $\mathbb{R}^3$ è composta da 3 elementi, quindi $v_1, \ldots, v_4$ sicuramente non è una base.
Possiamo estrarre una base di $\mathbb{R}^3$ se $rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3$, ovvero se ci sono 3 colonne indipendenti.

$$rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \geq 2 \text{ perchè } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Orlando il minore preso in considerazione otteniamo facilmente che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Per il Teorema di Kronecker sappiamo che $rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$ Quindi non è possibile estrarre una base di $\mathbb{R}^3$ perchè il massimo numero di vettori indipendenti è 2

Esercizio

Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ contenente $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Innanzitutto osserviamo che è possibile trovre un vettore perchè v_1 e v_2 sono **linearmente indipendenti** (non sono proporzionali). Affinchè v_1, v_2, w (linearmente indipendenti) sia una base di $\mathbb{R}^3$ è necessario che $\begin{vmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\\ v_1 & v_2 & w\end{vmatrix} \neq 0$, per ottenere questo scegliamo un "vettore semplice"[a] come $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\end{vmatrix} \neq 0$$

[a]che permetta di calcolare facilmente il determinante applicando Laplace

14 Basi Ortogonali e Ortonormali

Definizione 14.1

$v_1, \ldots, v_n$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$ se $v_1 \cdot v_j = 0 \forall \neq j$ (prod. scalare).

Ovviamente, per definizione la base canonica di $\mathbb{R}^n$ è una base ortogonale

Esercizio

Dati $e_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) e_2 = \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ determinare v in modo che e_1, e_2, v sia una base ortogonale.

Per fare quanto richiesto è sufficiente considerare $v = e_1 \times e_2$, quindi $v = \left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\\2\end{smallmatrix}\right)$

Esercizio

Dati $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e considerando $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ determinare una base ortogonale di V.

- v_1, v_2 sono una base di V perchè generano V e sono linermente indipendenti (non proporzionali)
- osserviamo che $v_1 \cdot v_2 \neq 0$

Manteniamo v_1 e cambiamo v_2, vogliamo trovare v_1, w con

1. $w \in V$
2. $v_1 \cdot w = 0$

1.

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$
$$w = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$w = \begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$
$$\lambda_1 = -\lambda_2$$

Scegliamo per esempio $\lambda_2 = 1 \rightsquigarrow \lambda_1 = -1 \rightsquigarrow w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Quindi $\{v_1, w\}$ è una base ortogonale di V

Definizione 14.0: Base ortonormale

$v_1, \ldots, v_n$ è una **base ortonormale** se è una base ortogonale e tutti i vettori hanno norma 1, ovvero se: $v_i \cdot v_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$

Da una base ortogonale si puo' sempre una base ortonormale dividendo i vettori per il proprio modulo.

Esercizio

$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ Calcoliamo la base ortonormale:

$$\|v_1\| = \sqrt{2}, \|v_2\| = 1 \tag{9}$$

La base ortonormale è quindi $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Esercizio

Dati $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ determinare se:

1. i vettori sono linearmente dipendenti
2. si puo' estrarre una base di $\mathbb{R}^3$
3. v_4 è combinazione lineare di v_1, v_3

1. Si, stiamo considerando un numero di vettori $n = 4 > 3$ (dim $\mathbb{R}^3$)
2. Si, se $rk\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix} = 3$
3. Si, se $rk\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & 2 \\ \vdots & \vdots & 0 \\ v_1 & v_3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow v_4 \in \langle v_1, v_3 \rangle$